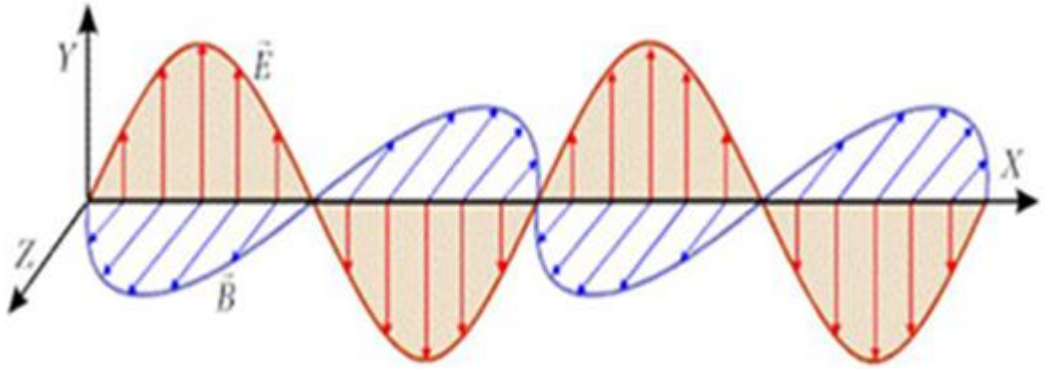
Wykład IV
Odbicie i transmisja

Prędkość fazowa fali em.



W próżni $$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

W ośrodku $$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

Oddziaływanie światła z materią

Właściwości optyczne ośrodka absorbującego światło opisuje zespolona funkcja dielektryczna

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

Ponieważ $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ ⟹ $\tilde{n} = n + i\kappa$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon_1 \qquad 2n\kappa = \varepsilon_2$$

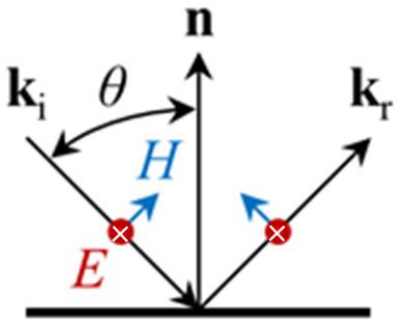
$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)^{1/2} \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)^{1/2}$$

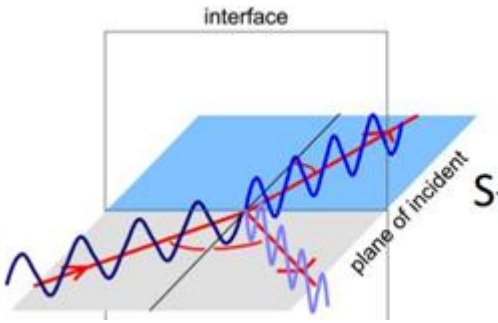
Małe κ ⟹ $n = \sqrt{\varepsilon_1} \qquad \kappa = \frac{\varepsilon_2}{2n}$

Fala em na granicy 2 ośrodków

Wektor Poyntinga:

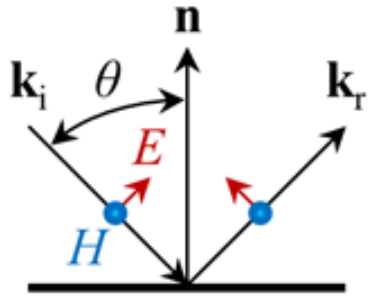
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

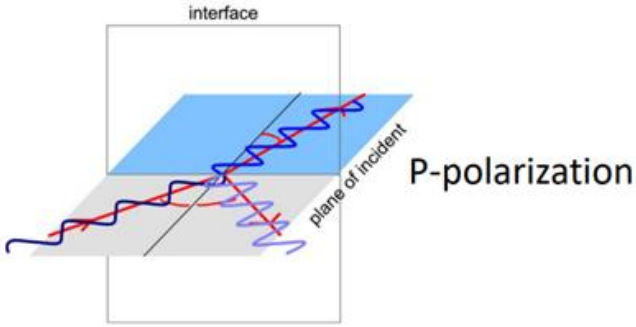




Fala poprzeczna elektryczna (TE)

$\vec{E}$ prostopadłe do płaszczyzny padania - polaryzacja prostopadła (niem. Senkrecht)

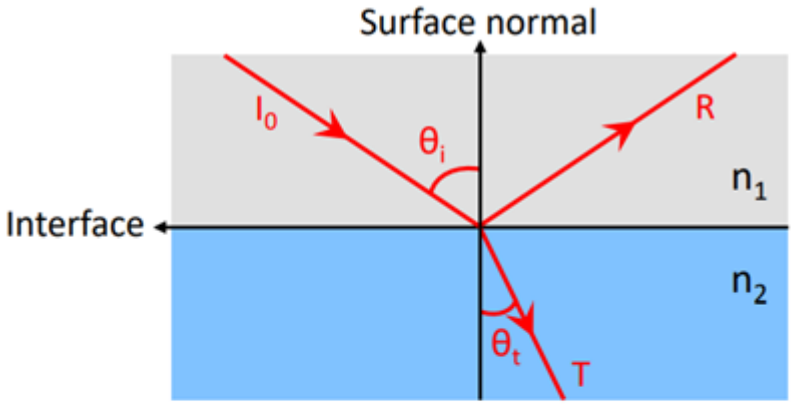




Fala poprzeczna magnetyczna (TM)

$\vec{E}$ równoległe do płaszczyzny padania - polaryzacja równoległa

Współczynniki Fresnela



R: Reflectivity
T: Transmissivity
r: reflection coefficient
E: Electric field strength
I: Electric field Intensity

$$R + T = 1$$

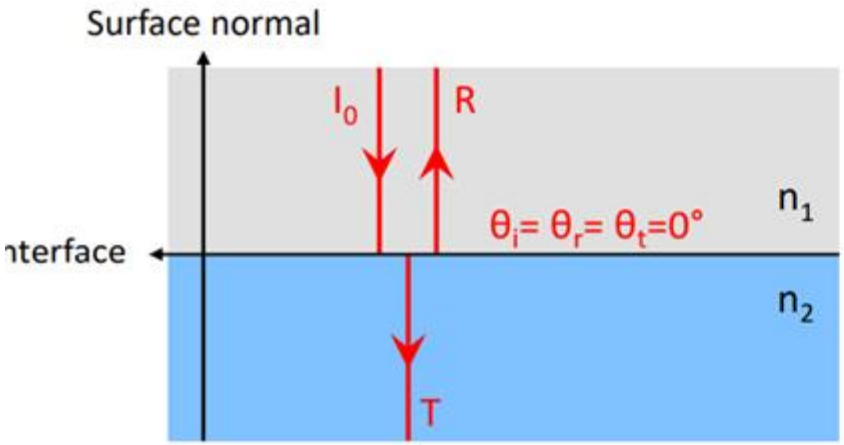
$$r = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)$$

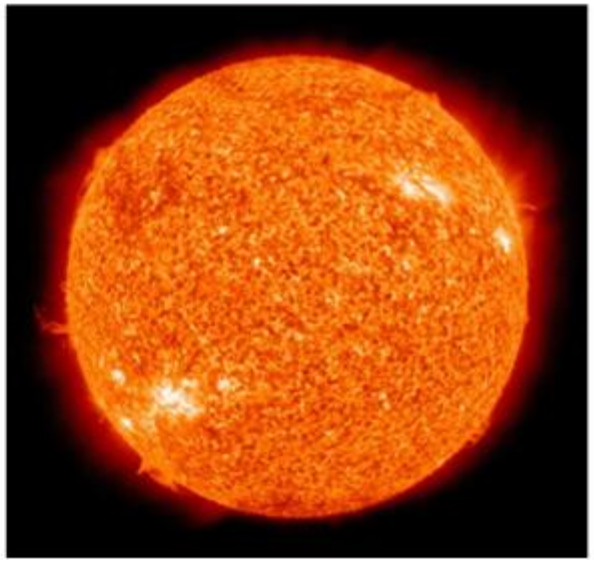
$$r_p = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}$$

$$r_s = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

$$I \propto E^2 \longrightarrow R = r^2$$

Kąt padania 0° Światło niespolaryzowane

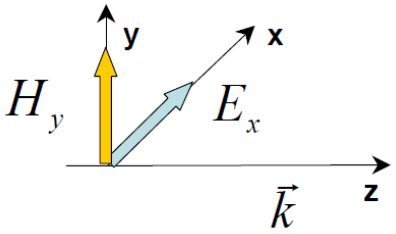




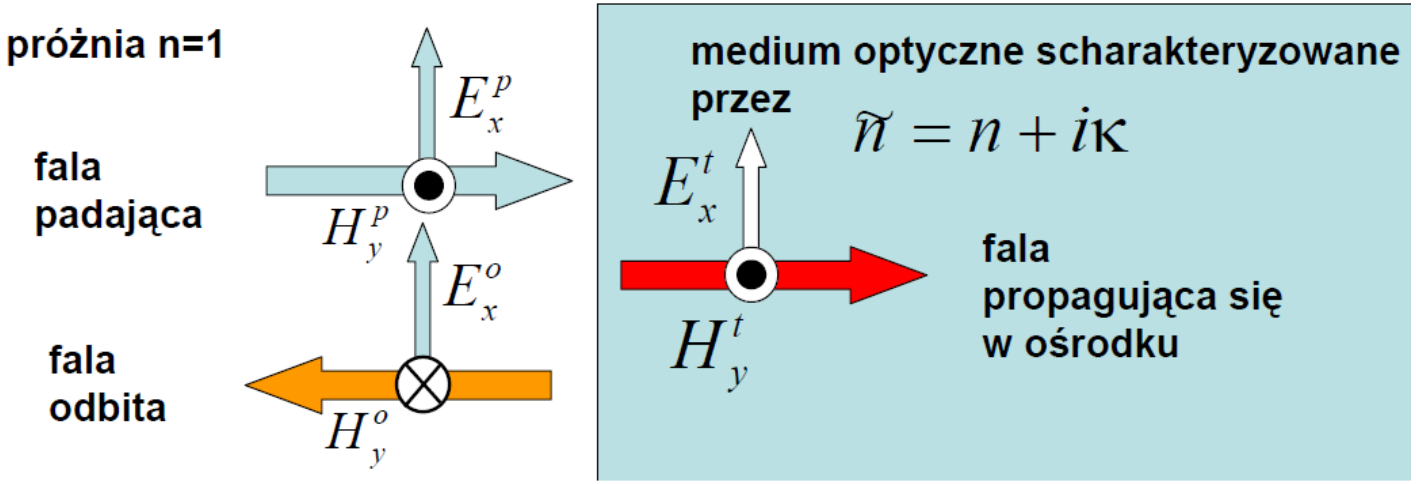
$$\theta_i = 0^\circ \longrightarrow R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \qquad R = \frac{1}{2}\left(r_S^2 + r_P^2 \right)$$

Warunki ciągłości na granicy 2 ośrodków

Niech fala em. spolaryzowana liniowo rozchodzi się wzdłuż osi z



i pada prostopadle na granicę 2 ośrodków.



Wtedy

$$\begin{cases} E_x^t = E_x^p + E_x^o \\ H_y^t = H_y^p - H_y^o \end{cases}$$

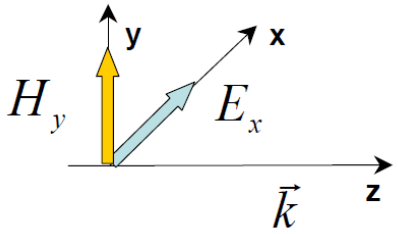
oraz

$$\begin{cases} E_{x0}^t = E_{x0}^p + E_{x0}^o \\ H_{y0}^t = H_{y0}^p - H_{y0}^o \end{cases}$$

Współczynnik odbicia

Wykład 3:

$$\frac{E_m}{B_m} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{n} = v$$



$$H_{y0} = \frac{\tilde{n} E_{x0}}{c \mu_0 \mu_r}$$

Warunki ciągłości na granicy 2 ośrodków:

$$\begin{cases} E^t_{x0} = E^p_{x0} + E^o_{x0} \\ H^t_{y0} = H^p_{y0} - H^o_{y0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E^t_{x0} = E^p_{x0} + E^o_{x0} \\ \tilde{n} E^t_{x0} = E^p_{x0} - E^o_{x0} \end{cases}$$

$$\frac{E^o_x}{E^p_x} = \frac{1-\tilde{n}}{1+\tilde{n}} \Rightarrow R = \left| \frac{E^o_x}{E^p_x} \right|^2 = \left| \frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}+1} \right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}$$

Dla κ małego (słaba absorpcja)

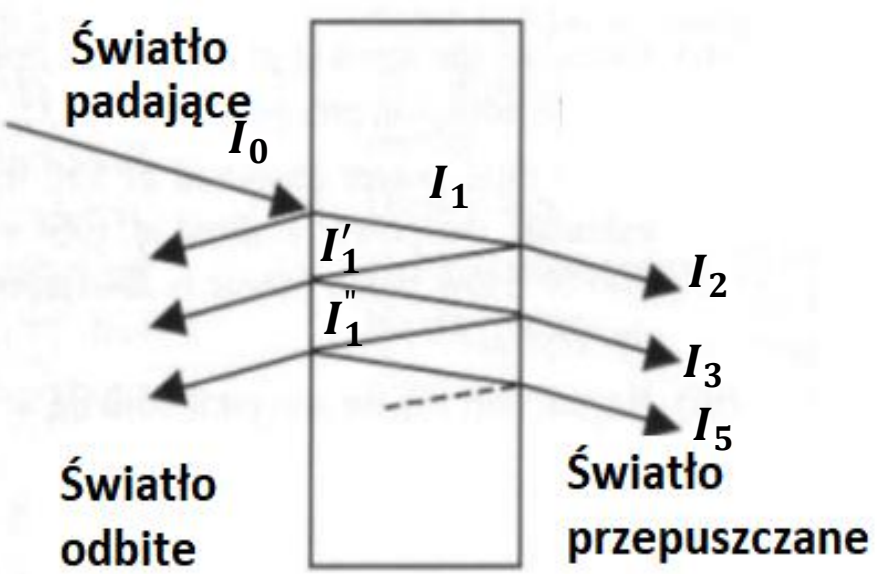
$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

Dla ośrodków o różnych wsp. załamania

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1} \right|^2$$

Odbicia wielokrotne – światło niespójne

Założenie: $R_1 = R_2 = R$



$$I_1 = I_0(1-R)$$

$$I_2 = I_1(1-R)e^{-\alpha d} = I_0(1-R)^2 e^{-\alpha d}$$

$$I_1' = I_1 R e^{-\alpha d} = I_0 R(1-R)e^{-\alpha d}$$

$$I_1'' = I_1' R e^{-\alpha d} = I_0 R^2(1-R)e^{-2\alpha d}$$

$$I_3 = I_1''(1-R)e^{-\alpha d} = I_0 R^2(1-R)^2 e^{-3\alpha d}$$

$$I_5 = I_0 R^4(1-R)^2 e^{-5\alpha d}$$

Suma nieskończonego szeregu geometrycznego:

$$T = \frac{I_T}{I_0} = \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha d}}{1 - R^2 e^{-2\alpha d}}$$

α duże $\boxed{T = (1-R)^2 e^{-\alpha d}}$

α małe $\boxed{T = \frac{(1-R)^2}{1-R^2} = \frac{1-R}{1+R}}$

$\boxed{R = \frac{1-T}{1+T}}$

Odbicia wielokrotne – światło spójne

Jeśli długość koherencji $d_k > d$ ⟹

$$T = \frac{I_T}{I_0} = \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha d}}{1 - 2Re^{-\alpha d}cos\Phi + R^2 e^{-2\alpha d}}$$

gdzie Φ jest przesunięciem fazowym po zamknięciu jednego cyklu przejścia przez próbkę.

Jeśli $\alpha d \gg 1$ ⟹ $T = (1-R)^2 e^{-\alpha d}$

Metale

Właściwości:

- **połyskliwa, gładka powierzchnia**
- **ciągliwość i kowalność**
- **dobre przewodnictwo elektryczne**
- **dobre przewodnictwo cieplne**

Właściwości te wynikają z faktu, że w metalach koncentracja nośników swobodnych jest bardzo duża. Nośniki te pochodzą z powłok walencyjnych atomów metalu. Elektrony nie są związane z konkretnym jonem dodatnim i mogą się swobodnie poruszać.

Elektrony swobodne nie doświadczają siły przeciwdziałającej wychyleniu w polu elektrycznym.
Jony i swobodne elektrony w metalu oraz w silnie domieszkowanych półprzewodnikach możemy traktować jak plazmę.

Odbicie metaliczne

Traktujemy ruch elektronu w ośrodku pod wpływem pola elektrycznego fali elektromagnetycznej, jak ruch w ośrodku z tłumieniem:

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + m_0\gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \quad *$$

gdzie $\tau = \frac{1}{\gamma}$ **- czas rozpraszania, związany z tłumieniem i załóżmy, że pole elektryczne oscyluje z częstością ω:**

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

Postulujemy rozwiązanie postaci:

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

Po podstawieniu do * otrzymujemy: $$x(t) = \frac{eE(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Odbicie metaliczne

Polaryzacja gazu elektronowego o koncentracji elektronów N:

$$P(t) = -Nex(t) = -\frac{Ne^2 E(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)} \qquad x(t) = \frac{eE(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Indukcja elektryczna:

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P = \varepsilon_0 E(t) - \frac{Ne^2}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)} E(t) \qquad \textbf{oraz} \qquad D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

gdzie ε_r - przenikalność elektryczna względna. Porównując obydwa wzory otrzymujemy:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\gamma\omega)} \qquad \omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0}\right)^{1/2}$$

Częstość plazmowa

Słabe tłumienie $\gamma \cong 0$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\gamma\omega)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Wtedy dla $\omega < \omega_p$ $\quad \tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{-1\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i\sqrt{C(\omega)}$

$$R = \left|\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right|^2 = \left|\frac{i\sqrt{C(\omega)} - 1}{i\sqrt{C(\omega)} + 1}\right|^2 = \frac{C(\omega) + 1}{C(\omega) + 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Odbicie metaliczne}$$

Natomiast dla $\omega > \omega_p$ $\quad \tilde{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

$$R = \left|\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1}\right|^2 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Odbicie częściowe}$$

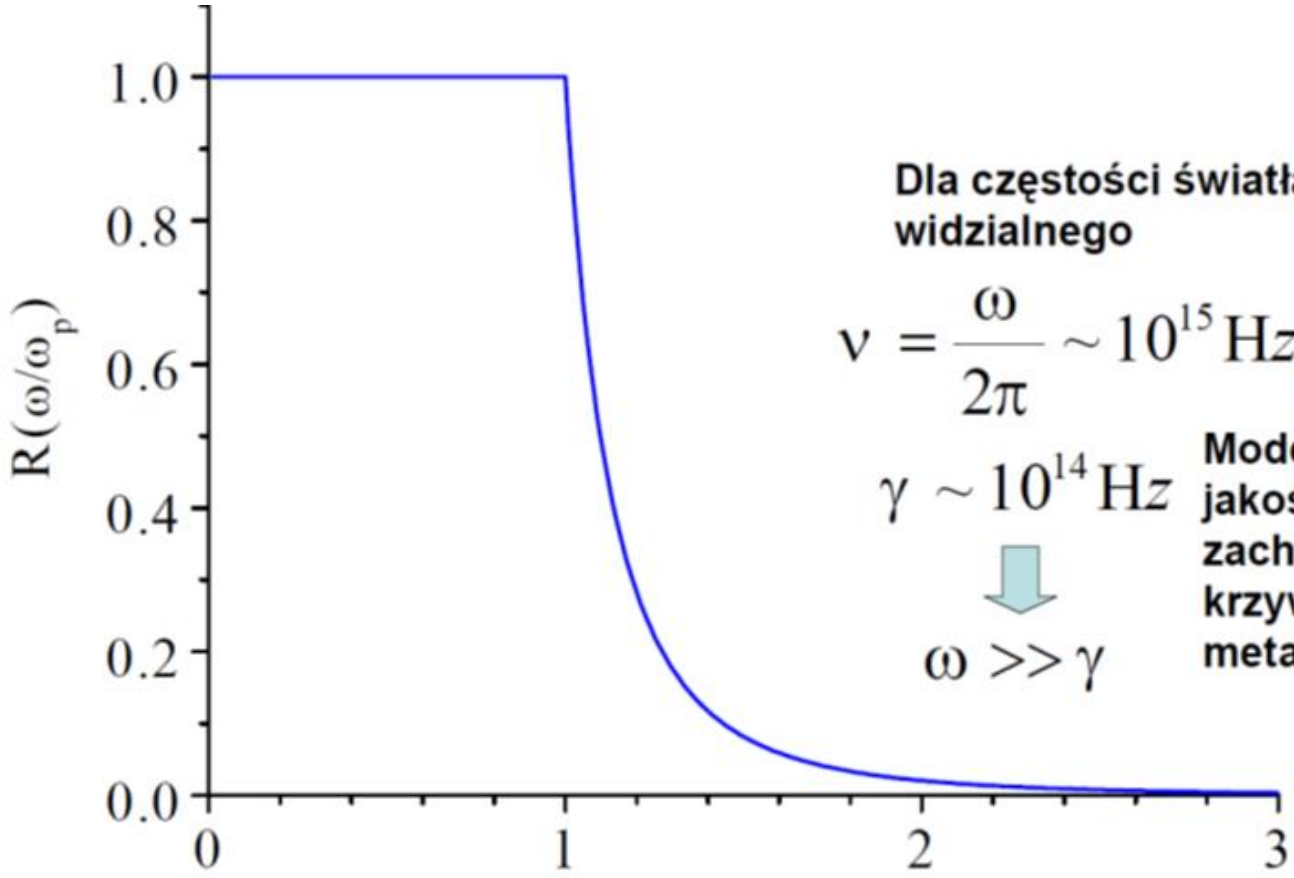
$$\omega \to \infty, R \to 0$$

$$\omega = \omega_p, R = 1$$

Współczynnik odbicia dla metali i półprzewodników silnie domieszkowanych

$$\omega \to \infty, R \to 0$$

$$\omega = \omega_p, R = 1$$



Dla częstości światła z obszaru widzialnego

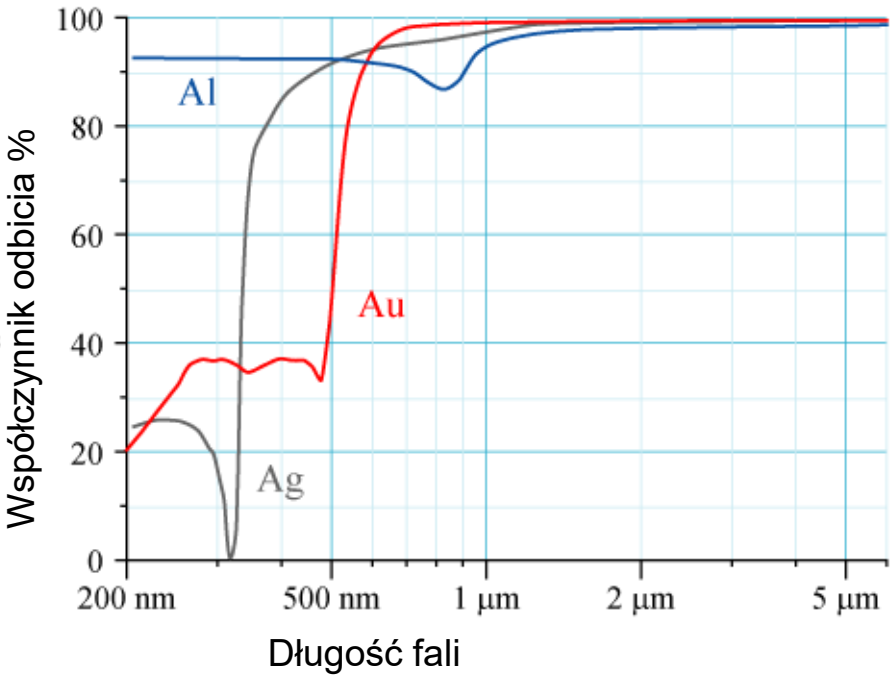
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

$$\gamma \sim 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega >> \gamma$$

Model Drudego jakościowo opisuje zachowanie krzywej odbicia metali.

Współczynnik odbicia dla metali



Metal	Valency	N (10^{28} m^{-3})	$\omega_p/2\pi$ (10^{15} Hz)	λ_p (nm)
Li (77 K)	1	4.70	1.95	154
Na (5 K)	1	2.65	1.46	205
K (5 K)	1	1.40	1.06	282
Rb (5 K)	1	1.15	0.96	312
Cs (5 K)	1	0.91	0.86	350
Cu	1	8.47	2.61	115
Ag	1	5.86	2.17	138
Au	1	5.90	2.18	138
Be	2	24.7	4.46	67
Mg	2	8.61	2.63	114
Ca	2	4.61	1.93	156
Al	3	18.1	3.82	79

W tabeli podano częstości plazmowe obliczone ze wzoru

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \right)^{1/2}$$

Minimum odbicia dla złota ok. 500nm jest związane z absorpcją wewnątrz pasmową, która odpowiada za żółte zabarwienie złota. Dotyczy to również minimum ok. 800nm dla Al i minimum ok. 320nm dla Ag

Model Drudego - absorpcja i przewodność

Pokażemy, że $\alpha = \sqrt{2\sigma_0 \omega \mu_0}$

Równanie ruchu elektronu w polu można zapisać jeszcze inaczej:

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + m_0 \gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \qquad \gamma = \frac{1}{\tau}$$

τ - **czas rozproszenia pędowego**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \gamma \vec{p} = -e\vec{E}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}(t)$$

Skoro zewnętrzne pole elektryczne oscyluje periodycznie, $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

To spodziewamy się również periodycznego zachowania prędkości:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \frac{-e\tau}{m_0} \frac{1}{(1 - i\omega\tau)} \vec{E}(t)$$

Gęstość prądu jest związana z prędkością nośników

$$\vec{j}(t) = -Ne\vec{v} = \sigma\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}}$$

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0}$$ - **przewodnictwo stałoprądowe**

Model Drudego - absorpcja i przewodność

Można pokazać, że ze związku $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$ $\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0}$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$$

Pomiary optyczne $\varepsilon_r(\omega)$

są równoważne pomiarowi przewodnictwa zmiennoprądowego!

Model Drudego - absorpcja i przewodność

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\gamma\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2\tau(\omega\tau - i)}{\omega(1+\omega^2\tau^2)} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

Rozważmy sytuację niskich częstości $\omega\tau << 1 \Rightarrow \varepsilon_2 >> \varepsilon_1 \Rightarrow n \approx \kappa = \sqrt{\varepsilon_2/2}$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2})^{1/2}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2})^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \sqrt{\frac{2\omega_p^2\tau\omega}{c^2}} = \sqrt{2\sigma_0\omega\mu_0}$$

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0}\right)^{1/2}$$

Współczynnik absorpcji jest proporcjonalny do pierwiastka z stałoprądowego przewodnictwa i częstości…

Efekt naskórkowy w metalach

Z równania $\alpha = \sqrt{2\sigma_0 \omega \mu_0}$ **wynika, że fala o częstości ω wnika do metalu na głębokość**

$$\delta = \frac{2}{\alpha} = \left(\frac{2}{\sigma_0 \omega \mu_0}\right)^{1/2} \quad *$$

(jeśli pole elektryczne zanika jak $e^{-z/\delta}$, to natężenie światła – jak $e^{-2z/\delta}$).

Przewodność wlaściwa miedzi $\sigma_0 = 6.5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$. Jak wynika ze wzoru * przy częstości 50Hz głębokość wnikania $\delta = 8.8mm$. Przy częstości $100MHz$ tylko 6.2μm.

Pole zanikające wykładniczo w głąb przewodnika nazywa się falą ewanescentną.

W metalach im większa jest przewodność elektryczna, tym silniej i na krótszym dystansie metal absorbuje wnikającą falę elektromagnetyczną a jednocześnie tym więcej światła odbija od swojej powierzchni. Dlatego dobre przewodniki (np. srebro, miedź, złoto) są doskonałymi zwierciadłami dla podczerwieni i światła widzialnego.